

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL

El cálculo mental consiste en realizar cálculos matemáticos utilizando sólo el cerebro sin ayudas de otros instrumentos como calculadoras o incluso lápiz y papel. Las operaciones escritas tienen una forma de hacerse, bien determinada y siempre igual, con independencia de los números que entren en juego. Sin embargo, no ocurre lo mismo en el plano mental. Una operación aritmética efectuada mentalmente no tiene, por lo general, una única vía de cálculo. A poco que se reflexione, sorprende la variedad de enfoques posibles. Explorarlos, inspeccionar todas las posibilidades, optar por una de ellas, determinar el orden de actuación, estudiar las transformaciones más apropiadas, valorar el resultado, etc., convierte al cálculo a secas en cálculo pensado. Por ejemplo, aquí aparecen varias formas de multiplicar $25 \cdot 48$:

$$25 \cdot 48 = 50 \cdot 24 = 100 \cdot 12 = 1200$$

$$25 \cdot 48 = 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 = 30 \cdot 40 = 1200$$

$$25 \cdot 48 = 25 \cdot (50 - 2) = 25 \cdot 50 - 25 \cdot 2 = 1250 - 50 = 1200$$

$$25 \cdot 48 = 25 \cdot (40 + 8) = 25 \cdot 40 + 25 \cdot 8 = 1000 + 200 = 1200$$

Pero, ¿son las únicas?, ¿cuál es la mejor?, ¿por qué? Para encontrar respuestas a estas y otras preguntas similares, nos encontraremos ante análisis de cantidades involucradas, dificultades de unas u otras estrategias de cálculo, ventajas e inconvenientes de cada una de ellas, elección y toma de decisiones, transferencia a situaciones análogas, posibilidad de generalización etc. Todas estas situaciones que podrían surgir del análisis del cálculo mental en clase, ayudan claramente a la formación de estrategias de pensamiento en nuestros alumnos, que si bien se sitúan inicialmente en el campo numérico, pueden servir para esquemas más generales y formativos.

He aquí un intento de recordar algunas técnicas y estrategias que nos pueden ser útiles al realizar cálculos mentales sencillos, puesto que para cálculos más complejos disponemos de otras estrategias en el cálculo escrito o de potentes herramientas de cálculo como son las calculadoras y ordenadores:

1. SUMA (adición)
2. RESTA (sustracción)
3. MULTIPLICACIÓN
4. DIVISIÓN

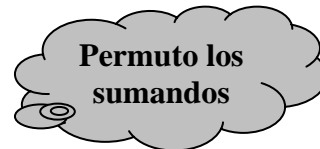
1. TÉCNICAS O ESTRATEGIAS PARA LA SUMA

1.1. Aplicar la **propiedad conmutativa** $a + b = b + a$.

Suele ser más sencillas (mayor rapidez y frecuencia de éxito), las sumas en las que el primer sumando es mayor que el segundo. Por lo que, sobre todo en sumas con números superiores a la decena, puede ser conveniente sumar el menor al mayor.

$$7 + 21 = 21 + 7 = 28$$

$$13 + 54 = 54 + 13 = 67$$



Para tres o más sumandos, esta propiedad nos permite reagrupar las cantidades para que las sumas resulten más sencillas.

$$35 + 24 + 5 = (35 + 5) + 24 = 40 + 24 = 64$$

1.2. **RECIENTOS O CONTEOS.**

El conteo unidad a unidad es posiblemente una de las primeras técnicas que aprendemos y los dedos son nuestros aliados para llevarla a cabo. Por ejemplo para calcular $7 + 6$, un alumno que se encuentre en etapas iniciales de la enseñanza, irá contando 6 unidades a partir del 7. Es decir $7 + 6 = 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$.

Trabajar con series ascendentes: por ejemplo de 2 en 2 ó 3 en 3, nos permitirá mejorar esta técnica y ganar rapidez. Así $7 + 6 = 7 + 2 + 2 + 2 = 13$ ó $7 + 3 + 3 = 13$.

La descomposición de los números de un dígito será otra de las destrezas básicas que nos conviene adquirir por su utilidad para emplearla en estrategias de cálculo con números mayores. Por ejemplo la descomposición del 5 será: (1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1) y la del 10 será: (1 + 9, 2 + 8, 3 + 7,...) etc.

1.3. **DOBLAR.**

La suma de un número consigo mismo ($a + a$), calcular el doble de una cantidad, es otra de las destrezas que conviene agilizar por ser muy frecuente su aparición. Podemos recurrir a esta técnica incluso en situaciones que no parecen muy propicias:

- Números consecutivos (vecinos). Pensaremos en el doble del menor y sumaremos 1.

$$7 + 8 = 7 + 7 + 1$$

- El número misterioso: cuando se está ante una pareja de números casi vecinos, números entre los cuales hay uno en medio escondido, entonces es posible resolver la situación hallando el doble del número misterioso.

$$6 + 8 = 7 + 7$$

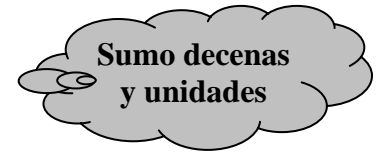
$$7 + 9 = 8 + 8$$

1.4. DESCOMPOSICIÓN

Se trata de descomponer uno, o los dos sumandos, en sumas o restas (ej: $18 = 10 + 8$ ó $18 = 20 - 2$), de forma que se transforme la operación inicial en otra equivalente más sencilla. Normalmente, los referentes para la descomposición serán las decenas más próximas. Basándonos en esta idea podemos encontrar diferentes formas de sumar:

1.4.1. A un nº se le suma progresivamente las unidades, decenas, centenas,.. del otro.

$$58 + 19 = 58 + 9 + 10 = 67 + 10 = 77$$



1.4.2. Igual que en el apartado anterior pero en orden inverso.

$$58 + 19 = 58 + 10 + 9 = 68 + 9 = 77$$

1.4.3. Sumar de izquierda a derecha: “me olvido de las unidades, sumo las decenas y luego sumo las unidades”.

$$58 + 19 = 50 + 10 + 8 + 9 = 60 + 17 = 77$$

1.4.4. Si uno de los números es próximo a una decena, podemos descomponer uno de los sumandos de tal manera que se pueda completar el otro a la decena más próxima.

$$58 + 19 = 58 + 2 + 17 = 60 + 17 = 77$$



1.4.5. Para sumar un número terminado en 8 ó 9 es muy útil descomponer uno de los sumandos como sustracción.

$$\begin{aligned} 58 + 19 &= 58 + 20 - 1 = 78 - 1 = 77 \\ 23 + 48 &= 23 + 50 - 2 = 73 - 2 = 71 \end{aligned}$$



2. TÉCNICAS O ESTRATEGIAS PARA LA RESTA

La resta es inseparable de la suma, pero cuidado, con esta operación no podemos utilizar la propiedad conmutativa. Veamos distintas ideas para la resta:

2.1 RECUELTOS O CONTEOS (UTILIZAR PRUEBA DE LA RESTA)

A la hora de restar dos cantidades, podemos pensar en la idea de descontar para ver lo que nos queda, pero en ocasiones será más sencillo utilizar la prueba de la resta para buscar el resultado, es decir, partiendo del sustraendo contar hasta llegar al minuendo.

Para calcular por ejemplo $7 - 5$ pensaremos en contar desde 5 hasta 7 (es como plantearnos la distancia que hay entre el 5 y el 7 ó averiguar el salto que debo dar para llegar desde el 5 hasta el 7). Así tendremos que $7 - 5 = 2$ porque $5 + 2 = 7$. Con esta idea, podemos transformar la operación de restar en un pensamiento de sumar:

Pensar en el resultado de la resta $37 - 25$ equivale a pensar qué número le debo sumar a 25 para obtener 37, por lo que $37 - 25 = \boxed{?} \longrightarrow 25 + \boxed{?} = 37 \longrightarrow \boxed{?} = 12$

2.2 DESCOMPOSICIÓN

Aplicando la misma idea de descomponer un número que en las sumas podemos aplicar estas técnicas a la hora de restar:

2.2.1. Restar del minuendo las unidades, decenas, centenas... del sustraendo, en este orden o en el inverso.

$$96 - 42 = 96 - 2 - 40 = 94 - 40 = 54$$

$$96 - 42 = 96 - 40 - 2 = 56 - 2 = 54$$



**Descompongo
el sustraendo**

2.2.2 Si uno de los números es próximo a una decena, completar hasta esa decena y sumar o restar unidades del resultado final.

$$57 - 19 = 57 - 20 + 1 = 37 + 1 = 38$$

$$89 - 15 = 90 - 15 - 1 = 75 - 1 = 74$$



**Redondeo y
compenso**

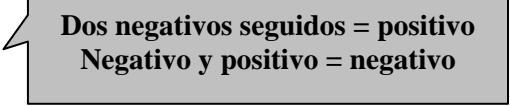
OBSERVACIONES (PARA SUMA Y RESTA)

1. Hay ocasiones (como sumas y restas sin llevadas fundamentalmente) en las que puede ser fácil reproducir mentalmente los algoritmos de lápiz y papel. Por ejemplo para calcular $586 - 123$ pensaríamos así: como $5 - 1$ es **4**, $8 - 2$ es **6** y $6 - 3$ es **3** el resultado será **463**

2. Si aparecen **números positivos y negativos** hay que tener siempre en cuenta la regla de los signos.

$$(+5) - (-8) = 5 + 8 = 13$$

$$(-3) + (-4) = (-3) - 4 = -7$$



Dos negativos seguidos = positivo
Negativo y positivo = negativo

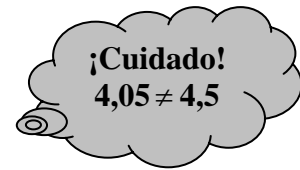
Recuerda que si estamos ante una suma, sumar el número menor al mayor suele minimizar errores:

$$(-2) + 8 = 8 + (-2) = 8 - 2 = 6$$

3. Si aparecen **números decimales**, debemos fijarnos muy bien en la coma y sumar o restar correctamente las cantidades del mismo orden. Si los dos números tienen el mismo nº de cifras decimales las probabilidades de error son menores, por lo que puede ser buena idea completar con ceros (a la derecha) el nº que menos cifras decimales tenga.

$$6,18 - 4,05 = 2,13$$

$$6,18 + 4,5 = 6,18 + 4,50 = 10,68$$



4. Si aparecen **números fraccionarios** pondremos común denominador antes de efectuar la suma o resta. Estas operaciones pueden ser más propias del cálculo escrito, pero hay situaciones que podemos resolverlas mentalmente sin ninguna dificultad:

4.1 Sumas o restas de fracciones con el mismo denominador: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{6}{5} = \frac{2-6}{5} = \frac{-4}{5}$$

4.2 Sumas o restas de un nº entero y una fracción: $c \pm \frac{a}{b} = \frac{bc \pm a}{b}$

$$5 + \frac{1}{3} = \frac{15}{3} + \frac{1}{3} = \frac{15+1}{3} = \frac{16}{3}$$

3. TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA LA MULTIPLICACIÓN

3.1 APLICAR PROPIEDAD CONMUTATIVA

Como en el caso de la suma, también para la multiplicación podemos aprovecharnos de la posibilidad de cambiar el orden de los factores. Aún sabiendo cuánto es el resultado de una multiplicación como $3 \cdot 9$ muchas personas prefieren conmutar mentalmente $9 \cdot 3$ antes de contestar. Además, en ocasiones, para una multiplicación de varios factores, el utilizar la propiedad conmutativa nos permitirá obtener productos más sencillos.

$$25 \cdot 13 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 13 = 100 \cdot 13 = 1300$$

3.2 REDUCCIÓN A LA SUMA

En distintas situaciones, conviene no olvidar que una multiplicación es una suma de factores iguales.

$$215 \cdot 2 = 215 + 215 = 430$$

3.3 DESCOMPONER Y UTILIZAR PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Se trata de descomponer un factor en sumas o restas (buscando redondeos) y luego aplicar la propiedad distributiva:

$$82 \cdot 7 = (80 + 2) \cdot 7 = 560 + 14 = 574$$

$$39 \cdot 4 = (40 - 1) \cdot 4 = 160 - 4 = 156$$

$$42 \cdot 12 = 42 \cdot (10 + 2) = 420 + 84 = 504$$

Para multiplicar mentalmente un número por un factor dígito (por ejemplo, $27 \cdot 8$), se opera empezando por multiplicar no las unidades, como en el cálculo escrito, sino las decenas del multiplicando ($20 \cdot 8 = 160$), después se multiplican las unidades ($7 \cdot 8 = 56$) y luego se suman ambos resultados ($160 + 56 = 216$).

3.4 FACTORIZACIÓN

Consistente en descomponer uno o ambos factores en otros más simples, no necesariamente primos. Su fundamento estructural es la propiedad asociativa de la multiplicación pero ocasionalmente, se acude a la propiedad conmutativa.

$$18 \cdot 15 = 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 = 10 \cdot 27 = 270$$



3.5 MULTIPLICAR DOBLANDO Y DIVIDIENDO POR DOS

Hay casos en que uno de los números a multiplicar es par. En ese caso, puedes dividirlo por 2 y multiplicar el otro por 2. Puedes repetir esta operación hasta que te resulte más fácil realizar la operación.

$$14 \cdot 16 = 28 \cdot 8 = 56 \cdot 4 = 112 \cdot 2 = 224.$$

3.6 CÁLCULO APROXIMADO

Si lo que interesa es hacer una estimación del resultado de una multiplicación puedes utilizar la táctica de redondear una cantidad hacia abajo y otra hacia arriba.

$$23 \cdot 48 \approx 20 \cdot 50 \approx 1000$$

$$412 \cdot 79 \approx 400 \cdot 80 \approx 32000$$

3.7 MULTIPLICACIONES BÁSICAS

Ayudándonos de estas estrategias, podemos elaborar un “recetario” de situaciones concretas, que puede ser útil para agilizar algunas multiplicaciones:

3.7.1. MULTIPLICAR POR 10 ó POTENCIAS DE 10

Gracias a nuestro sistema de numeración decimal, es evidente que la multiplicación más sencilla es la multiplicación de un número por 10 ó potencias de 10. Por cada potencia de 10 añadiremos un cero al número ó, si se trata de números decimales, desplazaremos la coma hacia la derecha y añadiremos ceros si no hay suficientes decimales.

$$\begin{aligned}25 \cdot 10 &= 25\mathbf{0} \\12 \cdot 100 &= 12 \cdot 10^2 = 12\mathbf{00} \\37,9 \cdot 1000 &= 37,9 \cdot 10^3 = 37\mathbf{900}\end{aligned}$$



3.7.2. MULTIPLICAR POR MÚLTIPLOS DE 10 (20, 30, 40...)

Utilizando la idea de factorizar vemos que multiplicar por 20 es lo mismo que multiplicar por 2 y por 10, multiplicar por 300 equivale a multiplicar por 3 y por 100,...etc.

$$\begin{aligned}15 \cdot 20 &= 15 \cdot 2 \cdot 10 = 300 \text{ (Multiplicar por 2 y añadir un cero)} \\12 \cdot 400 &= 12 \cdot 4 \cdot 100 = 4800 \text{ (Multiplicar por 4 y añadir dos ceros)}\end{aligned}$$

3.7.3. MULTIPLICAR POR 2, 4, 8, ... (POTENCIAS DE 2)

Multiplicar por dos se puede asociar a la idea de **doblar**. Multiplicar por cuatro será doblar el doble, ...etc.

$$\begin{aligned}12 \cdot 2 &= 12 + 12 = 24 \\12 \cdot 4 &= 24 + 24 = 48 \\12 \cdot 8 &= 48 + 48 = 96\end{aligned}$$



Esta idea se puede extender a multiplicaciones por cualquier potencia de dos. Por ejemplo, para multiplicar 15 por $16 = 2^4$ doblaré 4 veces el 15:

$$15 \cdot 16 = \mathbf{15} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{30} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{60} \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{120} \cdot 2 = \mathbf{240}$$



3.7.4. MULTIPLICAR POR 3

Multiplicar un n° por 3, equivale a sumarlo tres veces (calcular el triple) o añadir el doble.

$$\begin{aligned}12 \cdot 3 &= 12 + 12 + 12 = 36 \\12 \cdot 3 &= 12 + 24 = 36\end{aligned}$$

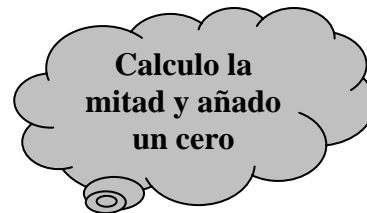
3.7.5. MULTIPLICAR POR 5 y 25

Como $5 = \frac{10}{2}$, multiplicar un n° por 5 es lo mismo dividirlo entre 2 y multiplicarlo por 10.

$$46 \cdot 5 = \frac{46}{2} \cdot 10 = 23 \cdot 10 = 230 \quad (\text{Calculo la mitad de 46 y añado un cero})$$

Por la misma razón, como $25 = \frac{100}{4}$, podemos concluir que para multiplicar un n° por 25 basta multiplicarlo por 100 (añadir 2 ceros) y dividirlo por 4 (dividir 2 veces por 2).

$$18 \cdot 25 = 1800/4 = 900/2 = 450$$



3.7.6. MULTIPLICAR POR 6

Podemos pensar en multiplicarlo por 2 y luego por 3.

$$15 \cdot 6 = 15 \cdot 2 \cdot 3 = 30 \cdot 3 = 90$$

3.7.7. MULTIPLICAR POR 9 (99, 999,...)

Para multiplicar un n° por 9 podemos multiplicarlo por 10 (añadir un cero) y restar el número.

$$16 \cdot 9 = 16 \cdot (10 - 1) = 16 \cdot 10 - 16 = 160 - 16 = 144$$

Podemos generalizar esta idea a multiplicaciones por 99 (añadir dos ceros y restar el n°), 999, ...etc.

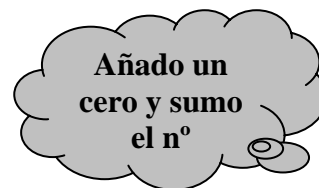
$$25 \cdot 99 = 25 \cdot (100 - 1) = 2500 - 25 = 2475$$



3.7.8. MULTIPLICAR POR 11

Para multiplicar un n° por 11 podemos multiplicarlo por 10 (añadir un cero) y sumar el número.

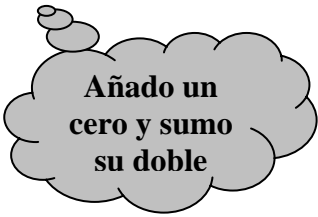
$$16 \cdot 11 = 16 \cdot (10 + 1) = 16 \cdot 10 + 16 = 160 + 16 = 176$$



3.7.9. MULTIPLICAR POR 12

Para multiplicar un nº por 12 podemos multiplicarlo por 10 (añadir un cero) y sumar el doble de ese número.

$$15 \cdot 12 = 15 (10 + 2) = 150 + 30 = 180$$

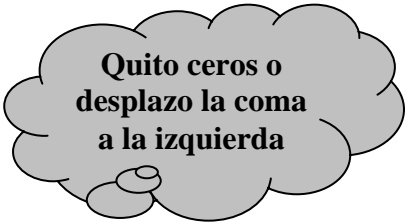


3.7.10. MULTIPLICAR POR UN N° ENTRE 0 Y 1 EQUIVALE A DIVIDIR

MULTIPLICAR POR 0,1 ; 0,01 ; 0,001 es igual que dividir entre 10, 100 ó 1000 respectivamente.

$$28 \cdot 0,1 = 2,8$$

$$2500 \cdot 0,01 = 25$$



MULTIPLICAR POR 0,5 equivale a dividir por 2 ó calcular la mitad.

$$140 \cdot 0,5 = 70 \text{ (La mitad de 140 es 70)}$$

MULTIPLICAR POR 0,25 equivale a dividir por 4 (2 veces por 2) o calcular la cuarta parte.

$$240 \cdot 0,25 = 60 \text{ (La mitad de 240 es 120 y la mitad de 120 es 60)}$$

3.7.11. MULTIPLICACIONES POR 1,25 ; 1,5 y 2,5

MULTIPLICAR POR 1,25 equivale sumar al número su cuarta parte.

$$20 \cdot 1,25 = 20 + \frac{20}{4} = 20 + 5 = 25$$

$$1,25 = 1 + 0,25 = 1 + \frac{1}{4}$$

MULTIPLICAR POR 1,5 equivale a sumar al número su mitad, ó la mitad por 3.

$$16 \cdot 1,5 = 16 + \frac{16}{2} = 16 + 8 = 24$$

$$16 \cdot 1,5 = \frac{16}{2} \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$$

$$1,5 = 1 + 0,5 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

MULTIPLICAR POR 2,5 equivale a doble del nº y sumarle su mitad, o la cuarta parte por 10.

$$24 \cdot 2,5 = 24 \cdot (2 + 0,5) = 48 + 12 = 60$$

$$24 \cdot 2,5 = \frac{24}{4} \cdot 10 = 6 \cdot 10 = 60$$

$$2,5 = 2 + 0,5 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$

3.8 TRUCOS O CURIOSIDADES DE ALGUNAS MULTIPLICACIONES.

3.8.1. Multiplicar por 11 un n° de dos cifras “ab”



ab · 11

Si expresamos el n° de 2 cifras $ab = 10a+b$ y operamos obtenemos:

$$ab \cdot 11 = (10a+b) \cdot (10+1) = 100a + 10a + 10b + b = 100a + 10(a+b) + b = a(a+b)b$$

Si $a+b < 10$ (suma de los dígitos menor de 10)

$$52 \cdot 11 = 5 \underline{(5+2)} 2 = 572 \text{ (dejamos un hueco entre los números } 5_2, \text{ sumamos los dos dígitos } (5+2=7) \text{ y colocamos el resultado en el hueco central. } 5\underline{7}2 \text{)}$$

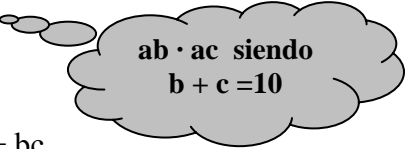
En caso contrario:



$$57 \cdot 11 = 5 \underline{(5+7)} 7 = 5 \underline{(12)} 7 \text{ (dejamos un hueco entre los dos números } 5_7, \text{ sumamos los dígitos } (5+7=12), \text{ y el } 1 \text{ lo añadiremos al dígito inicial } (5+1) \text{ y el } 2 \text{ lo colocaremos en el centro. } 6\underline{2}7 \text{)}$$

Espero que ahora te resulten inmediatas: $72 \cdot 11 = 792$ y $64 \cdot 11 = 704$

3.8.2. Multiplicar dos números de dos dígitos cuyo primer dígito es el mismo y los segundos suman 10.



ab · ac siendo
 $b + c = 10$

$$ab \cdot ac = (10a+b) \cdot (10a+c) = 100a^2 + 10ac + 10ba + bc = 100a^2 + 10a(b+c) + bc = 100a^2 + 100a + bc = 100a(a+1) + bc$$

Por lo que podemos multiplicar el primer dígito por una unidad más $a(a+1)$ para obtener la primera parte de la multiplicación y multiplicar los segundos dígitos bc para obtener la segunda parte.

$$42 \cdot 48 = \underline{20} \underline{16} = 2016 \text{ (Multiplico } 4 \text{ por una unidad más, } 4 \cdot 5 = \underline{20} \text{ para obtener así la primera parte de la multiplicación y multiplico los segundos dígitos } 2 \cdot 8 = \underline{16} \text{ y obtengo la segunda parte)}$$

Espero que ahora te resulte inmediato que : $72 \cdot 78 = 5616$

3.8.3. Calcular el cuadrado de un número de dos dígitos que acaba en 5.

Se trata de un caso particular del apartado anterior.



$(a5)^2$

$$(a5)^2 = (10a+5)^2 = (10a+5)(10a+5) = 100a^2 + 50a + 50a + 25 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$$

Como vemos, si un número acaba en 5, su cuadrado siempre acaba en 25. Para tener el resto del cuadrado, cogemos el primer número y lo multiplicamos por un número más que él.

$$65 \cdot 65 = \underline{42} \underline{25} = 4225 \text{ (Multiplico el 6 por una unidad más } 6 \cdot 7 = 42 \text{ para obtener la primera parte del producto y 25 será siempre la segunda parte.)}$$

Espero que ahora te resulte inmediato que : $35 \cdot 35 = 1225$

3.8.4. PRODUCTO DE NÚMEROS SIMÉTRICOS RESPECTO DE UNA DECENA

Para obtener estos productos nos basaremos en la expresión $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$38 \cdot 42 = (40 - 2) \cdot (40 + 2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596$$

(Observar que los números 38 y 42 distan dos unidades de la decena 40).

$$17 \cdot 23 = (20 - 3) \cdot (20 + 3) = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$$

(Ahora, los números 17 y 23 distan tres unidades de la decena 20).

Espero que ya te resulte inmediato que : $26 \cdot 34 = 900 - 16 = 884$

3.8.5. MULTIPLICAR UN MÚLTIPLO DE 5 POR UN MÚLTIPLO DE 2

En estos casos será muy práctico factorizarlos e ir buscando productos que den 10 ó múltiplo de 10.

$$35 \cdot 8 = 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 10 \cdot 28 = 280$$

$$75 \cdot 12 = 3 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 3 = 100 \cdot 9 = 900$$

$$45 \cdot 16 = 9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 = 10 \cdot 72 = 720$$

4. TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA LA DIVISIÓN

Dividir es inseparable a la idea de repartir, a cuánto nos toca,...etc. Desde un punto de vista más técnico podemos preguntarnos ¿cuántas veces cabe el divisor en el dividendo?, pero también podemos pensar en utilizar la prueba de la división para obtener el resultado y así transformar la división en multiplicación. De esta manera para calcular $18 : 3$ podemos pensar en $3 \cdot \boxed{?} = 18$

En ocasiones tenderemos a reproducir mentalmente los algoritmos de lápiz y papel y por ejemplo si tenemos que calcular $195/3$ posiblemente pensemos que 19 entre 3 da **6** y queda 1, 1 con 5 son 15, entre 3 = **5**, luego el resultado es **65**.

Algunas otras estrategias y atajos que podemos utilizar ante determinadas divisiones serían:

4.1 DIVIDIR ENTRE 2 Y 3.

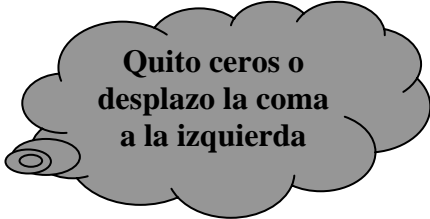
Pensaremos en calcular la mitad o la tercera parte de una cantidad.

4.2 DIVIDIR ENTRE 10 ó POTENCIAS DE 10.

Por cada potencia de 10 quitaremos un cero al dividendo ó desplazaremos la coma hacia la izquierda si no hay ceros.

$$3670 : 10 = 367$$

$$345 : 100 = 3,45$$



Quito ceros o
desplazo la coma
a la izquierda

Simplifica: Si dividendo y divisor acaban en cero eliminar el máximo de ellos.

$$80 : 40 = 8 : 4 = 2$$

$$36000 : 400 = 360 : 4 = 90$$


4.3 DIVIDIR ENTRE 5 ó 25.

Como $5 = \frac{10}{2}$, tendremos que $a : 5 = a : \frac{10}{2} = \frac{2a}{10}$, por lo que dividir un n° entre 5 equivaldrá a multiplicarlo por 2 y dividirlo entre 10.

$$\frac{640}{5} = \frac{640 \cdot 2}{10} = \frac{1280}{10} = 128$$

Como $25 = \frac{100}{4}$, tendremos que $a : 25 = a : \frac{100}{4} = \frac{4a}{100}$, por lo que dividir un n° entre 25 equivaldrá a multiplicarlo por 4 y dividirlo entre 100

$$\frac{700}{25} = \frac{700 \cdot 4}{100} = \frac{2800}{100} = 28$$



Multiplico por
2 y divido
entre 10


4.4 DIVIDIR POR DESCOMPOSICIÓN DEL DIVISOR EN FACTORES.

Con esta estrategia transformaremos una división en una sucesión de divisiones más sencillas. Por ejemplo, para dividir un n° entre 6 se dividirá por 2 y el resultado por 3.

4.4.1 División un n° entre una **potencia de dos**. ($a : 2^n$)

Dividiremos entre 2 de forma sucesiva n veces.

$$440 : 8 = (440 : 2) : 4 = (220 : 2) : 2 = 110 : 2 = 55$$



**Dividir entre dos
sucesivamente**

4.4.2 División entre un **múltiplo de 10** (20, 30, 40,....).

Para dividir un n° entre 20 lo dividiremos entre 2 y el resultado entre 10. etc.

$$460 : 20 = (460 : 2) : 10 = 230 : 10 = 23$$

4.5 EL DIVIDENDO ES MÚLTIPLO DE 10.

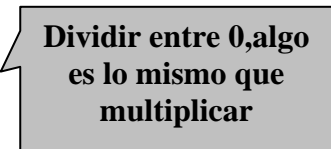
Para dividir un número acabado en uno o varios ceros, dividir el número sin los ceros y añadir los ceros al cociente.

$$120 : 4 = (12 : 4) \cdot 10 = 3 \cdot 10 = 30$$
$$6400 : 32 = (64 : 32) \cdot 100 = 2 \cdot 100 = 200$$

4.6. DIVIDIR POR UN N° ENTRE 0 Y 1

4.6.1 DIVIDIR ENTRE 0,1 ; 0,01 ; 0,001 es igual que multiplicar por 10, 100 ó 1000 respectivamente.

$$28 : 0,1 = 28 \cdot 10 = 280$$
$$2,3 : 0,01 = 2,3 \cdot 100 = 230$$



**Dividir entre 0, algo
es lo mismo que
multiplicar**

4.6.2 DIVIDIR ENTRE 0,5 equivale a multiplicar por 2 ó calcular el doble.

$$70 \cdot 0,5 = 70 \cdot 2 = 140$$

4.6.3 DIVIDIR ENTRE 0,25 equivale a multiplicar por 4 (2 veces por 2)

$$70 : 0,25 = 70 \cdot 4 = 280$$

4.6.4 DIVIDIR ENTRE 0,2: equivale a multiplicar por 5 (multiplicar por 10 y dividir entre 2)

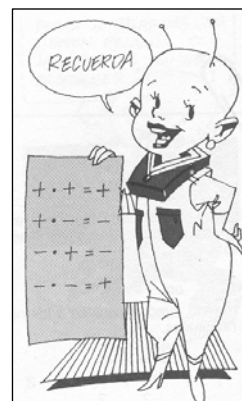
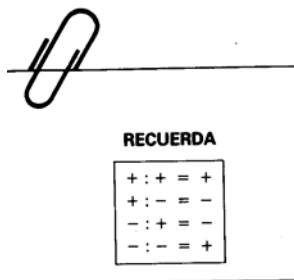
$$70 : 0,2 = 70 \cdot 5 = 350$$

OBSERVACIONES (PARA MULTIPLICACIONES Y DIVISIONES)

1. Si operamos con números **positivos y negativos** debemos tener en cuenta las reglas de los signos y antes de hacer la operación analizar el signo que tendrá el resultado.

$$5 \cdot (-7) = -5 \cdot 7 = -35$$

$$(-12) : (-6) = +2$$



2. Si aparecen **números fraccionarios** las multiplicaciones y divisiones serán:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (\text{Multiplicar en horizontal}) \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (\text{Multiplicar en cruz})$$

2.1 Si **uno de los dos términos no es un n° fraccionario**, puede ser oportuno, para evitar errores, ponerle un 1 como denominador:

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$$

2.2 Antes de efectuar las operaciones conviene pensar en una posible **simplificación**:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

2.3 **Fracción como operador:** $\frac{a}{b} de c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{c}{b} \cdot a$

En múltiples situaciones aparecen fracciones como operadores multiplicativos.

Ej: Si he recorrido las tres cuartas partes de una etapa de 200 km de longitud. Habré

recorrido $\frac{3}{4} de 200 = \frac{3}{4} \cdot 200$.

Tendremos dos formas de resolverlo y cada uno optaremos en cada caso por la más conveniente:

a) 1° multiplico 200 por 3 y luego divido por 4: $\frac{3}{4} \cdot 200 = \frac{3 \cdot 200}{4} = \frac{600}{4} = \frac{300}{2} = 150 \text{ km.}$

b) 1° divido 200 por 4 y luego multiplico por 3: $\frac{3}{4} \cdot 200 = 3 \cdot \frac{200}{4} = 3 \cdot 50 = 150 \text{ km.}$

2.4 Porcentajes (%)

La fracción más utilizada en nuestra sociedad es la que tiene denominador 100.

Dominar las equivalencias entre porcentaje, fracción y decimal ($30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$)

nos permitirá utilizarlas indistintamente de la manera que más nos interese.

Ejemplo1: Voy a comprar una televisión que vale 400 € y me hacen un descuento del 30%. ¿Cuánto me descuentan?.

Para calcular el descuento puedo pensar en hacer esta operación:

$$\text{El } 30\% \text{ de } 400 = \frac{30}{100} \cdot 400 = 30 \cdot \frac{400}{100} = 30 \cdot 40 = 120 \text{€}$$

Pero si prefiero, lo puedo hacer así:

$$\text{El } 30\% \text{ de } 400 = \frac{30}{100} \cdot 400 = 0,3 \cdot 400 = 120$$

Sería muy positivo para determinados cálculos diarios, que tuviésemos asentadas las relaciones que aparecen tan frecuentemente en nuestras vidas como:

$$\text{La mitad: } \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\% = 0,5$$

$$\text{La tercera parte: } \frac{1}{3} \approx \frac{33}{100} = 33\% = 0,33$$

$$\text{La cuarta parte: } \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\% = 0,25$$

$$\text{La quinta parte: } \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\% = 0,2^\circ \text{ etc.}$$

Ejemplo2: Voy a comprar una televisión que vale 400 € y me hacen un descuento del 30%, ¿cuánto pagaré por la televisión?.

Es muy probable que muchas personas se planteen calcular primero el descuento y luego hacer la resta del precio inicial menos el descuento ($400-120= 280$ €). El razonamiento es totalmente correcto pero podríamos calcularlo de forma más sencilla (utilizando una única operación) , pensando que si me hacen un descuento del 30% pago el 70% de su precio, luego pagaré por la televisión el 70% de 400 =

$$\frac{70}{100} \cdot 400 = 0,7 \cdot 400 = 280 \text{€}$$

Vemos que la rebaja en un precio del 30% es equivalente a multiplicarlo por 0,70 y si el precio hubiera subido en un 30% lo tendríamos que haber multiplicado por 1,30. Sería interesante utilizar este factor multiplicativo (índice de variación), para calcular o estimar, las subidas (recargos) o bajadas (descuentos) de precios que se producen a diario en nuestra vida cotidiana:

PRECIO INICIAL	REBAJA/ SUBIDA	FACTOR MULTIPLIC	PRECIO FINAL
20 €	↑ 50 %	1,50	$20 \cdot 1,50 = 20 + 10 = 30$ € (sumo la mitad)
20 €	↑ 25 %	1,25	$20 \cdot 1,25 = 20 + 5 = 25$ € 8 (sumo la cuarta parte)
20 €	↑ 10 %	1,10	$20 \cdot 1,10 = 20 + 2 = 22$ € (sumo la décima parte)
20 €	↑ 100 %	2	$20 \cdot 2 = 40$ € (calculo el doble)
20 €	↓ 10 %	0,90	$20 \cdot 0,9 = 20 - 2 = 18$ € (resto la decima parte)
20 €	↓ 50 %	0,50	$20 \cdot 0,5 = 10$ € (divido entre 2)